Chapitre 14
Dérivation

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, I et J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$ non vide et non réduits à un point.
De plus, a est un point de I (donc forcément fini).

On rappelle que $\mathring{I}$ désigne l'ensemble des points de I qui ne sont pas des extrémités de I.

1 Dérivée d'une fonction

1.1 Nombre dérivé

Définition 14.1 (Nombre dérivé)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite *finie* en a.
Cette limite est appelée nombre dérivé de f en a. Il est noté $f'(a)$.

Par abus, on dit parfois que $f'(a)$ est la "dérivée de f en a".

Remarque.

- On trouve aussi la notation $\dfrac{df}{dx}(a)$ en physique.
- Pour être dérivable en a, il faut donc au moins être défini en a. Le point a doit donc appartenir à I.
- Lorsque la limite existe, on a donc
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$
- En posant $x=a+h$ dans la limite ci-dessus, on peut réécrire :
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

Remarque (Nombre dérivée et tangente)**.** Lorsque f est dérivable en a, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en a d'équation
$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

Remarque (Taux d'accroissement et pente de la corde)**.** Pour $a\in I$ fixé, l'application
$$\begin{aligned}\tau_a : I\setminus\{a\} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{aligned}$$
est appelée taux d'accroissement de f en a. $\tau_a(x)$ représente la pente de la corde qui relie le point $(a,f(a))$ au point $(x,f(x))$ de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Propriété 14.2 (Développement limité d'ordre 1)

Soit $f : I\to\mathbb{R}$ une fonction. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est dérivable en a.

(ii) Il existe $\ell\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon : I\to\mathbb{R}$ tels que
$$\forall x\in I\quad f(x)=f(a)+\ell(x-a)+(x-a)\varepsilon(x)\qquad\text{et}\qquad \lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0 \tag{$*$}$$

Lorsque ces conditions sont vérifiées, on a alors $\ell=f'(a)$.

Lorsque f vérifie $(*)$, on dit que f admet un développement limité d'ordre 1 en a. En posant $x = a+h$ et $\alpha(h) := \varepsilon(a+h)$, alors pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$, le reste de l'assertion $(*)$ se réécrit comme

$$f(a+h) = f(a) + \ell h + \alpha(h)h \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0$$

Démonstration. Supposons (ii) et montrons (i). Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on réécrit $(*)$ ainsi :

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell$$

Comme $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, on en déduit que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \ell \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

de sorte que f est dérivable en a et $\ell = f'(a)$. Ainsi, (i) est vraie.

Supposons maintenant (i) et montrons (ii). Pour tout $x \in I$, on pose

$$\varepsilon(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & \text{si } x \neq a \\ 0 & \text{si } x = a \end{cases}$$

On vérifie alors que la première assertion de (ii) est vraie avec $\ell = f'(a)$: si $x \in I \setminus \{a\}$ c'est une réécriture, et pour $x = a$, cela revient à écrire $f(a) = f(a) + 0 + 0$. Enfin, comme f est dérivable en a, il est clair que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. D'où (ii) est vraie. □

Exemple 1. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(e^{-\frac{1}{|x|}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. En utilisant un DL, déterminer $f'(0)$.

Propriété 14.3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration.

□

1.2 Fonction dérivée

Définition 14.4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable si elle est dérivable en tout point de I. On note alors

$$\begin{aligned} f' : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

On dit que f' est l'application dérivée de f ou simplement la dérivée de f.

Attention ! La notation $'$ est réservée aux *fonctions* : on évitera donc d'écrire “ $(\sqrt{x})'$ ” ou “ $(x^n)'$ ”, car x^n et $\sqrt{x}$ sont des nombres, pas des fonctions. Par contre la fonction $\cos'$ et le réel $\arctan'(x)$ ont un sens au même titre que f' et $f'(x)$ pour une fonction f dérivable.

Exemple 2. cos est dérivable (sur $\mathbb{R}$) et $\cos' = -\sin$.

Si $f : x \mapsto \sqrt{x}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Remarque. Par abus de langage, si $X \subset \mathbb{R}$ est une réunion d'intervalles non vides et non réduits à un point, on dit que f est dérivable sur X si f est dérivable en tout point de X. Par exemple,

- $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dite dérivable (sur $\mathbb{R}^*$) car elle l'est en tout point de $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^*$
- la fonction tan est dite dérivable (sur $D_{\tan}$) car elle l'est en tout point de $D_{\tan} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$.

Remarque. Similairement à la continuité, la dérivabilité est soumise à une convention subtile : dire qu'une fonction f est dérivable sur un ensemble X ne signifie pas que $f|_X$ est dérivable : par exemple avec $f = 1_{\mathbb{R}_+}$, la fonction f n'est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car elle n'est pas dérivable au point 0 (car non continue). Cependant, $f|_{\mathbb{R}_+}$ (qui est constante égale à 1) est bien dérivable (sur $\mathbb{R}_+$).

Propriété 14.5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est dérivable (sur I), alors f est continue (sur I).

1.3 Opérations sur les dérivées

Théorème 14.6 (Somme, produit, inverses)

Soit $u : I \to \mathbb{R}$ et $v : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Si u, v sont dérivables sur I, alors :

1. Pour tous réels λ, μ, la fonction $\lambda u + \mu v$ est dérivable sur I et $(\lambda u + \mu v)' = \lambda u' + \mu v'$.
2. uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + v'u$.
3. Si u ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$.
4. Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

Ce théorème est également vrai si on remplace les mots “sur I” par “en a” et qu'on modifie les formules en les évaluant au point a. Par exemple, l'assertion 2 devient : si u, v sont dérivables en a, alors uv aussi et

$$(uv)'(a) = u'(a)v(a) + v'(a)u(a)$$

Exemple 3 (**Important**)**.** Toute fonction polynômiale est dérivable sur $\mathbb{R}$. Toute fonction rationnelle est dérivable (en les points où elle est définie).

Théorème 14.7 (Composition)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions avec $f(I) \subset J$ (de sorte que l'application $g \circ f$ soit bien définie).

- Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$$

- Si f est dérivable (sur I) et g est dérivable (sur J), alors $g \circ f$ est dérivable (sur I) et

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$$

Exemple 4 (Formules importantes)**.** Soit u une fonction dérivable. Alors :

- e^u est dérivable et $(e^u)' = u'e^u$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, u^n est dérivable et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
- Si $u > 0$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, u^α est dérivable et $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$
- Si $u > 0$, alors $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

Théorème 14.8 (Inverse)

Soit $f : I \to J$ une fonction bijective et continue sur I et dérivable en $a \in I$. Soit $b := f(a) \in J$. La fonction $f^{-1} : J \to I$ est dérivable en b si et seulement si $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Lorsque c'est le cas,

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Démonstration. On ne démontre que le sens direct.

□

1.4 Dérivées à droite et à gauche

Définition 14.9

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On suppose que $a \neq \sup I$, càd a n'est pas l'extrémité supérieure de I. On dit que f est dérivable à droite en a si la fonction
$$f_d := f|_{I\cap[a,+\infty[}$$
est dérivable en a, et on définit la dérivée de f à droite en a par
$$f'_d(a) := \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
- On suppose que $a \neq \inf I$ càd a n'est pas l'extrémité inférieure de I. On dit que f est dérivable à gauche en a si la fonction
$$f_g := f|_{]-\infty,a]\cap I}$$
est dérivable en a, et on définit la dérivée de f à droite en a par
$$f'_g(a) := \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Remarque.

- Les notations f_g et f_d ci-dessus ne sont en fait pas officielles. Par contre $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ sont couramment utilisées.
- Si f est dérivable à droite en a, elle est continue à droite en a : il suffit d'appliquer la Proposition 14.3 à $f|_{I\cap[a,+\infty[}$.
- Si $a = \sup(I)$, alors
$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
et donc f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche en a.

Propriété 14.10

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $a \in \mathring{I}$. Alors
$$f \text{ est dérivable en } a \qquad \text{ssi} \qquad \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$
Lorsque c'est le cas, on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Exemple 5. La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, avec $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$. Cependant, f n'est pas dérivable en 0.

2 Extremum

Définition 14.11 (Extremum global)

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.

- On dit que f admet un maximum (global) en a si $\quad \forall x \in D \qquad f(x) \leq f(a)$
- On dit que f admet un minimum (global) en a si $\quad \forall x \in D \qquad f(x) \geq f(a)$
- On dit que f admet un extremum (global) en a si f admet en a un maximum ou un minimum.

Attention à ne pas confondre la valeur de l'extremum, i.e. $f(a)$, et l'un des points en lequel il est atteint, i.e. a.

On notera que si f admet un maximum en a, alors $-f$ admet un minimum en a.

Définition 14.12 (Extremum local)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f admet un maximum local en a si
$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta] \qquad f(x) \leq f(a)$$
- On dit que f admet un minimum local en a si
$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \cap [a-\eta, a+\eta] \qquad f(x) \geq f(a)$$
- On dit que f admet un extremum local en a si f admet en a un maximum local ou un minimum local.

Formulation équivalente : f admet un maximum local en a si $f \leq f(a)$ sur un voisinage de a.

Remarque (Local et global)**.** Un extremum global est un extremum local. La réciproque est fausse : la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ admet un maximum local en 0 mais ce n'est pas un maximum global.

Définition 14.13

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que a est un point critique de f si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.

Dit autrement, un point critique est un point où f possède une tangente horizontale.

Théorème 14.14

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $a \in \mathring{I}$. Si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

Démonstration. On démontre ce résultat lorsque f admet en a un maximum local. Par définition, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a-\eta, a+\eta]$, on a $f(x) \leq f(a)$, donc

$$f(x) - f(a) \leq 0$$

- Si $x > a$, on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$. D'où par passage à la limite,

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$$

- Si $x < a$, on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. D'où par passage à la limite,

$$f'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$$

Finalement, $0 \leq f'(a) \leq 0$ donc $f'(a) = 0$. □

Remarque (Lorsque a est au bord)**.** Le théorème tombe en défaut si a est une extrémité de I : par exemple la fonction identité sur $[0,1]$ admet un minimum en 0 et un maximum en 1 alors que ce ne sont pas des points critiques.

Remarque (Un point critique n'est pas forcément un extremum)**.** Même sous les hypothèses du théorème 14.14, être un point critique est une condition nécessaire *et non suffisante* pour être un extremum local. Par exemple, 0 est un point critique de $f : x \mapsto x^3$, mais ce n'est ni un maximum local, ni un minimum local.

Méthode

Pour trouver un extremum global, on peut recourir à un tableau de variations.
Pour un extremum local, cela marche aussi, mais on verra d'autres outils plus précis plus tard.

3 Les grands théorème sur la dérivation

3.1 Théorème de Rolle

Théorème 14.15 (Théorème de Rolle)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

1. f est continue sur $[a,b]$
2. f est dérivable sur $]a,b[$
3. $f(a) = f(b)$

Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. La fonction f est continue sur le segment $[a,b]$, donc elle est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, elle admet un maximum (global) sur $[a,b]$ et un minimum (global) sur $[a,b]$.

- Si f admet un maximum en un point $x_M \in]a,b[$, alors comme f est dérivable en x_M et que x_M n'est pas une extrémité de $[a,b]$, il s'agit d'un point critique. Donc $f'(x_M) = 0$.
- Si f admet un minimum en un point $x_m \in]a,b[$, alors comme f est dérivable en x_m et que x_m n'est pas une extrémité de $[a,b]$, il s'agit d'un point critique. Donc $f'(x_m) = 0$.
- Si f n'atteint pas son maximum ni son minimum en tout point de $]a,b[$, alors ils sont tous les deux atteints sur les extrémités a et b. Par exemple f admet un minimum en a et un maximum en b, de sorte que $f(a) \leq f \leq f(b)$. Alors, comme $f(a) = f(b)$, on en déduit que f est constante sur $[a,b]$. Ainsi, en tout point $c \in]a,b[$, on a $f'(c) = 0$.

□

3.2 Le théorème des accroissements finis

Théorème 14.16 (Théorème des Accroissements Finis – TAF)

Soit $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

1. f est continue sur $[a,b]$
2. f est dérivable sur $]a,b[$

Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Démonstration. On pose

$$\begin{aligned} g : [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \end{aligned}$$

La fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ comme somme et produit de telles fonctions. De plus,

□

3.3 Dérivation et monotonie

Définition 14.17

On dit qu'un point $a \in I$ est un point intérieur de I si $a \in \mathring{I}$, i.e. si a n'est pas une extrémité de l'intervalle I.

Théorème 14.18

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable en tout point intérieur de I. Alors

- f est croissante si et seulement si $f' \geq 0$ en tout point intérieur de $\boxed{\text{l'intervalle}}$ I.
- f est décroissante si et seulement si $f' \leq 0$ en tout point intérieur de $\boxed{\text{l'intervalle}}$ I.
- f est constante si et seulement si $f' = 0$ en tout point intérieur de $\boxed{\text{l'intervalle}}$ I.

Remarque. Le théorème tombe en défaut si on ne l'applique pas sur un intervalle. Contre-exemple : la fonction "signe" définie sur $\mathbb{R}^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée 1, mais n'est pas constante.

Démonstration. On ne démontre que la première équivalence. On procède par double implication.

- Supposons $f' \geq 0$ en tout point intérieur à I et montrons que f est croissante.

- Supposons f croissante. Soit x un point intérieur de I : montrons que $f'(x) \geq 0$. Soit $y \in I$ tel que $y > x$. Comme f est croissante,
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$
et en passant à la limite quand y tend vers x^+, comme f est dérivable en x, on obtient $f'(x) \geq 0$.

□

Théorème 14.19

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable en tout point intérieur de I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est strictement croissante sur I.
- $f' \geq 0$ en tout point intérieur de I, et pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, on a $f'|_{]a,b[} \not\equiv 0$.

La deuxième condition peut également se réécrire : f' est positive sur $\mathring{I}$ et il n'y a pas d'intervalle (non vide et non singleton) $J \subset \mathring{I}$ sur lequel f' est identiquement nulle. En particulier, si $f' \geq 0$ et f' ne s'annule qu'en un nombre *fini* de points, alors f est strictement croissante.

Exemple 6. La fonction $x \mapsto x - \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée est positive et ne s'annule que sur $2\pi\mathbb{Z}$.

3.4 Inégalité des accroissements finis

Définition 14.20 (Fonction lipschitzienne)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $K \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est <u>K-lipschitzienne</u> si

$$\forall x, y \in I \qquad |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y|$$

Une fonction est dite <u>lipschitzienne</u> si elle est K-lipschitzienne pour un $K \geq 0$.

Exemple 7.

- La fonction $x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne (mais aussi 2-lipschitzienne, π-lipschitzienne...)
- La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne, mais sa restriction à $[-1, 1]$ est 2-lipschitzienne car

$$\forall x, y \in [-1, 1] \qquad \left|x^2 - y^2\right| = |(x + y)(x - y)| \leq |x + y| \times |x - y| \leq 2\,|x - y|$$

Exemple 8. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne.

Propriété 14.21

Toute fonction lipschitzienne est continue.

Comme le montre le théorème suivant, une fonction lipschitzienne est en quelque sorte un intermédiaire entre une fonction dérivable et une fonction continue. Il faut toutefois que la dérivée soit bornée.

Théorème 14.22 (Inégalité des Accroissements Finis)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable en tout point intérieur de I. S'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in \mathring{I}$, on a $|f'(x)| \leq K$, alors

$$\forall x, y \in I \qquad |f(x) - f(y)| \leq K\,|x - y| \qquad\qquad \text{(càd } f \text{ est } K\text{-lipschitzienne)}$$

Démonstration. Soit $x, y \in I$. Montrons que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. Si $x = y$, c'est évident. Si $x \neq y$, quitte à échanger les rôles de x et y, on peut considérer que $x < y$. Appliquons le TAF à f sur $[x, y]$:

- f est continue sur $[x, y]$ car f l'est sur I.
- f est dérivable sur $]x, y[$ car tout point de $]x, y[$ est nécessairement un point intérieur de I (même si x ou y sont des extrémités de I).

Ainsi, il existe $c \in]x, y[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$ donc

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = \left|f'(c)\right| \leq K$$

D'où on conclut en multipliant par $|x - y| \geq 0$. □

Remarque. L'implication de l'IAF est en fait une équivalence : si f est K-lipschitzienne (et dérivable en tout point intérieur de I), alors $|f'|$ est majorée par K.

Propriété 14.23

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f est K-lipschitzienne avec $K = \max\limits_{x \in [a,b]} \left|f'(x)\right|$.

Démonstration. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, f' est continue sur $[a, b]$ donc par composition il en va de même pour $|f'|$. Par le théorème des bornes atteintes, la fonction $|f'|$ est donc bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint son maximum et on peut poser

$$K := \max_{x \in [a,b]} \left|f'(x)\right|$$

Alors, par l'IAF, pour tous $x, y \in [a, b]$, on a bien $\quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. □

Dans le théorème ci-dessus, on s'est restreint à $[a,b]$ pour assurer que f atteint son maximum sur $[a,b]$. Plus généralement, pour $f : I \to \mathbb{R}$, s'il existe $K \geq 0$ tel que

$$\sup_{x\in I} \left|f'(x)\right| \leq K$$

alors pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$, en appliquant l'IAF à $[x,y]$, on obtient que $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$, càd f est K-lipschitzienne sur I.

Exemple 9. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $|\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|$.

3.5 Limite épointée

Avant de pouvoir aller plus loin, il faut étendre la notion de limite à un cadre légèrement plus général.

Définition 14.24 (Limite épointée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que <u>f admet une limite épointée en a</u> si $f|_{I\setminus\{a\}}$ admet une limite en a. On la note

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$$

La fonction f est donc définie en a, mais la valeur de $f(a)$ n'a aucune incidence sur l'existence éventuelle et la valeur de la limite épointée en a.

Exemple 10. $f : x \mapsto \lfloor -x^2 \rfloor$ vérifie $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = -1$. Par contre, f n'admet pas de limite en 0.

Exemple 11. $f : x \mapsto \begin{cases} x^{-2} & \text{si } x \neq 0 \\ -7 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ vérifie $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = +\infty$. Par contre, f n'admet pas de limite en 0.

Remarque (Limite épointée en une extrémité). Lorsque a est une extrémité de I, la notion de limite épointée équivaut à celle de limite à gauche ou à droite :

- Si $a = \inf I$, alors f admet une limite épointée en a si et seulement si f admet une limite à droite en a, et dans ce cas
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$
- Si $a = \sup I$, alors f admet une limite épointée en a si et seulement si elle admet une limite à gauche en a, et dans ce cas
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$$

Propriété 14.25 (Limite épointée en un point intérieur)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $a \in \mathring{I}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- La fonction f admet une limite épointée en a
- f admet une limite à gauche et à droite en a, et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

De plus, lorsque ces assertions sont vérifiées, toutes ces limites sont égales :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

On notera que, comme $a \in \mathring{I}$, les intervalles $I \cap]-\infty, a[$ et $I \cap]a, +\infty[$ sont donc non vides et non réduits à un point : c'est un cadre cohérent pour parler de limites à gauche et à droite en a.

Remarque (Limite et limite épointée)**.**

- Si f admet une limite en a, alors f admet une limite épointée en a (et ces limites sont égales). La réciproque est fausse, cf exemple 10.
- Cependant, si f admet une limite épointée en a et que cette limite vaut $f(a)$, alors f admet une limite en a, et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$. Dans ce cas, on a même que f est continue en a.

Dans l'exemple 1, la fonction $\varepsilon(x) = \begin{cases} x \sin\left(e^{-\frac{1}{|x|}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ vérifie $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \varepsilon(x) = 0 = \varepsilon(0)$ de sorte que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

3.6 Théorème de la limite de la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction qu'on suppose dérivable sur $I \setminus \{a\}$ avec $a \in \mathring{I}$. On souhaite savoir si f est aussi dérivable en a. On pourrait étudier la limite du taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ quand x tend vers a. Mais dans certains (rares) cas, trouver cette limite est difficile et il est plus simple d'utiliser le résultat suivant pour conclure.

Théorème 14.26 (Théorème de limite de la dérivée)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' admet une limite épointée (finie ou non) en a, càd si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$. En particulier :

- Si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
- Si $\ell = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, et donc f n'est pas dérivable en a.

Dans le premier cas, on a en particulier $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = f'(a)$, de sorte que f' est continue en a.
Dans le second cas, on a en particulier que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale en a.

Démonstration. Soit $x \in I \setminus \{a\}$. On pose

$$J = \begin{cases} [a,x] & \text{si } x > a \\ [x,a] & \text{si } x < a \end{cases} \qquad \text{et donc} \qquad \mathring{J} = \begin{cases}]a,x[& \text{si } x > a \\ ]x,a[& \text{si } x < a \end{cases}$$

Appliquons le TAF à f sur J. f est continue sur I donc sur J. De plus f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ donc est dérivable sur $\mathring{J}$. Ainsi, le TAF s'applique : il existe $c_x \in \mathring{J}$ tel que

$$f'(c_x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Or, comme $c_x \in \mathring{J}$, on a

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} c_x = a \qquad \text{avec} \quad c_x \neq a$$

De plus, par hypothèse, $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Par composition, on a donc

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(c_x) = \ell \qquad \text{donc} \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ (x \neq a)}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

D'où le résultat. □

Exemple 12. Montrer que $f : x \mapsto \arcsin(1 - x^4)$ est dérivable en 0.

4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

4.1 Définition

Par convention, on note $f^{(0)} = f$.

Définition 14.27 (Ensembles $\mathcal{D}^n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit (de manière récursive) qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable si la fonction $f^{(n-1)} : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, et la dérivée de cette fonction est alors notée $f^{(n)}$. On a ainsi

$$f^{(0)} = f \qquad f^{(1)} = f' \qquad f^{(2)} = f'' \qquad \text{etc.}$$

On note $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$, ou juste $\mathcal{D}^n(I)$, l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $f \in \mathcal{D}^n(I)$, alors on dit que $f^{(n)}(a)$ est la dérivée n-ième de f (évaluée) en a.
Comme $f^{(0)} = f$, par convention, toute fonction est "0 fois dérivable". Plus précisément cette assertion n'affirme rien et elle est considérée comme vraie (vide logique).

Définition 14.28 (Classe $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $n \in \mathbb{N}$.

- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ si f est n fois dérivable et si $f^{(n)}$ est continue.
- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ ou juste $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ ou juste $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque.

- En particulier $\mathcal{C}^0(I) = \mathcal{C}(I)$ est l'ensemble des fonctions (0 fois dérivables et) continues sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{C}^{n+1}(I) \subset \mathcal{D}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I)$.
  - En effet si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$, alors f est en particulier $n+1$ fois dérivable et donc $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I)$
  - Par ailleurs, si $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I)$, alors f est en particulier n fois dérivable, et comme $f^{(n)}$ est dérivable, elle est également continue. D'où $f \in \mathcal{C}^n(I)$.
- Plus généralement, on peut écrire :

$$\mathcal{C}^0(I) \supset \mathcal{C}^1(I) \supset \mathcal{C}^2(I) \supset \ldots \supset \mathcal{C}^\infty(I)$$

$$\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I)$$

Exemple 13 (Important)**.** Toute fonction polynômiale est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Toute fonction rationnelle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition.

Exemple 14.

- Les fonctions exp, ln, cos, sin, tan... sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ (sur leur ensemble de définition).
- Soit $f : x \mapsto |x|$. On a $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ mais $f \notin \mathcal{D}^1(\mathbb{R})$ car f n'est pas dérivable en 0.
- Soit $f : x \mapsto x^{3/2}$. On a $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ mais $f \notin \mathcal{D}^2(\mathbb{R}_+)$ car pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$, donc f' n'est pas dérivable en 0.

Remarque. On évitera d'écrire "$f^{(\infty)}$", cette fonction ne serait pas bien définie (sauf cas particuliers...).

4.2 Propriétés des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Propriété 14.29 (Combinaisons linéaires)

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^n(I)$. De plus, si $n \neq +\infty$,

$$\forall x \in I \qquad (\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x)$$

Propriété 14.30 (Produit – Formule de Leibniz)

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a $fg \in \mathcal{C}^n(I)$. De plus, si $n \neq +\infty$,

$$\forall x \in I \qquad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$$

Exemple 15. Soit $h : x \mapsto x^2 e^{\lambda x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et calculer sa dérivée n-ième pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le calcul ci-dessus nécessite une certaine rigueur. Comme on peut le voir, la formule trouvée pour $n \geq 2$ ne fonctionne pas pour tout $n = 0$ ou $n = 1$. Il est donc essentiel de distinguer les cas avant de faire apparaitre des termes “de nulle part”.

Propriété 14.31 (Quotient)

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Soit $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$. Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{C}^n(I)$.

Propriété 14.32 (Composition)

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^n(J,\mathbb{R})$, avec $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I)$.

Démonstration. Non exigible. □

Propriété 14.33 (Réciproque)

Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et $f : I \to J$ une bijection de classe $\mathcal{C}^n$. On suppose que la dérivée *première* f' ne s'annule pas sur I.
Alors $f^{-1} : J \to I$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^n$.

Démonstration. Non exigible. □

Remarque. Attention pour la propriété 14.33, on doit avoir $n \geq 1$.

Par exemple, si $f : I \to J$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^2$ on a pour tout $y \in J$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

et donc

$$(f^{-1})''(y) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Comme on peut le voir, pour que cette expression ait un sens, il suffit que f' ne s'annule pas (et f'' peut donc a priori s'annuler).

Exemple 16. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + \ln x$. On peut montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Sa dérivée est $f' : x \mapsto e^x + \dfrac{1}{x}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc l'application $f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

5 Fonctions complexes

La définition de la dérivabilité d'une fonction complexe est une adaptation naturelle de la notion pour les fonctions réelles :

Définition 14.34

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite *finie* en a. On note alors

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{C}$$

Cette limite est appelée nombre dérivé de f en a. Si f est dérivable en tout point $a \in I$, on définit alors sa (fonction) dérivée $f' : I \to \mathbb{C}$.

On peut définir de même les ensembles $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{C})$, $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^\infty(I,C)$.

Propriété 14.35

Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et $f : I \to \mathbb{C}$.

1. $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ si et seulement si $\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$. De plus, si $n \neq +\infty$, on a
$$f^{(n)} = (\mathrm{Re} f)^{(n)} + i\,(\mathrm{Im} f)^{(n)}$$
2. $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ si et seulement si $\overline{f} \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$. De plus, si $n \neq +\infty$, on a
$$\overline{f}^{(n)} = \overline{f^{(n)}}$$

Ce qui ne change pas

On peut généraliser les notions suivantes :

- Opérations sur les dérivées et les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et/ou $\mathcal{C}^\infty$: combinaisons linéaires, produit (formule de Leibniz), quotient. Pour la composition $g \circ f$, le cadre est $g : J \to \mathbb{C}$ et $f : I \to \boxed{\mathbb{R}}$ pour que $f(I) \subset J$.
- Dérivées à gauche, à droite en a.

Ce qui change

Soit $f : I \to \mathbb{C}$.

- Les notions de maximum, minimum de f n'ont pas de sens car il n'y a pas d'inégalités sur $\mathbb{C}$.
- Rolle et le TAF sont faux : par exemple si $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est définie par $f(t) = e^{it}$, alors f est continue sur $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$, et $f(0) = f(2\pi) = 0$ mais f' ne s'annule pas sur $]0, 2\pi[$. En effet
$$\left|f'(t)\right| = \left|ie^{it}\right| = 1 \neq 0$$
- L'IAF par contre demeure vrai, les valeurs absolues sont traitées comme des modules :

Théorème 14.36 (IAF complexe)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue sur I et dérivable en tout point intérieur de I. S'il existe $K \geq 0$ tel que pour tout point x intérieur à I, on a $|f'(x)| \leq K$, alors
$$\forall x, y \in I \qquad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Exemple 17. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\left|e^{ix} - e^{iy}\right| \leq |x - y|$.

En particulier, l'IAF fournit aussi le résultat suivant :

Théorème 14.37

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur I et dérivable en tout point intérieur de I. Alors :
f est constante si et seulement si $f' = 0$ en tout point intérieur de $\boxed{\text{l'intervalle}}$ I.